Chapitre 7 : correction des exercices théoriques

T.7.1

Puisque $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sont mutuellement exclusifs, les deux événements E_1 et $(E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m)$ le sont également. Dès lors, par (7.2), nous pouvons écrire :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m).$$

Les deux événements E_2 et $(E_3 \cup \ldots \cup E_m)$ étant mutuellement exclusifs, (7.2) nous donne :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3 \cup \ldots \cup E_m).$$

Les deux événements E_3 et $(E_4 \cup \ldots \cup E_m)$ étant mutuellement exclusifs, (7.2) nous permet d'écrire :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4 \cup \ldots \cup E_m).$$

En poursuivant de la même façon le raisonnement, nous obtenons bien finalement :

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_m).$$

T.7.2

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m$ avec $E_1, E_2, \ldots, E_m$ mutuellement exclusifs.

En considérant que les deux évenements E_1 et $(E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m)$ constituent une partition de E, la propriété 7.1 nous indique que

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m).$$

Mais E_2 et $(E_3 \cup \ldots \cup E_m)$ sont deux événements qui constituent une partition de l'événement $(E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_m)$. Dès lors, grâce à la propriété 7.1, nous avons :

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3 \cup E_4 \cup \ldots \cup E_m).$$

Mais E_3 et $(E_4 \cup \ldots \cup E_m)$ sont deux événements qui constituent une partition de l'événement $(E_3 \cup E_4 \cup \ldots \cup E_m)$. Dès lors, grâce à la propriété 7.1, nous avons :

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4 \cup E_5 \cup \ldots \cup E_m).$$

En poursuivant de la même façon cette démarche, on obtient bien finalement :

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_m).$$

T.7.3

$$\begin{aligned}
& P(A \cup B \cup C) \\
= \; & P(A \cup [B \cup C]) \\
= \; & P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap [B \cup C]) \qquad \text{par (7.14)} \\
= \; & P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap [B \cup C]) \qquad \text{par (7.14)}.
\end{aligned}$$

Or, $A \cap [B \cup C] = [A \cap B] \cup [A \cap C]$. Dès lors, par (7.14),

$$\begin{aligned} P(A \cap [B \cup C]) &= P([A \cap B] \cup [A \cap C]) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P([A \cap B] \cap [A \cap C]) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &\qquad - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

ce qui établit (7.15).

T.7.4

Le prélèvement successif et sans remise de n boules parmi les N boules de l'urne est une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont les $\binom{N}{n}$ résultats possibles sont équiprobables. On peut donc déterminer $P(r$ boules de type $A)$ en appliquant la définition classique de la probabilité.

Pour se retrouver avec r boules de type A, il faut nécessairement que l'on prélève sans remise r boules parmi les N_1 boules de type A de l'urne, et $(n-r)$ boules parmi les N_2 boules de type B de l'urne (avec, bien évidemment, $r \leq N_1$ et $n - r \leq N_2$). Il est dès lors clair que, parmi les $\binom{N}{n}$ résultats possibles de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, il y en a

$$\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}$$

qui sont favorables à la réalisation de l'événement « obtenir r boules de type A (et donc $n-r$ boules de type B) ». On a donc bien :

$$P(r \text{ boules de type } A) = \frac{\binom{N_1}{r}\binom{N_2}{n-r}}{\binom{N}{n}}\cdot$$

T.7.5

Puisque $\{E_1, \ldots, E_m\}$ est un système complet d'événements, on peut décomposer l'événement A de la manière suivante :

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_m).$$

Les événements $(A \cap E_j)$, $j = 1, \ldots, m$, constituent une partition de A. Par conséquent, la propriété 7.2 nous donne :

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_m).$$

Or, par la loi de multiplication, $P(A \cap E_j) = P(E_j)P(A|E_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, m$. Dès lors :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + \ldots + P(E_m)P(A|E_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(E_j)P(A|E_j), \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

$\boxed{\textbf{T.7.6}}$

En appliquant successivement la définition de la probabilité conditionnelle, la loi de multiplication et le théorème des probabilités totales, on a, pour $i = 1, \ldots, m$:

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)} = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(E_j)P(A|E_j)},$$

ce que nous voulions démontrer.