Chapitre 7 : correction des exercices pratiques

E.7.1

L'expérience aléatoire « tirer une carte au hasard dans un jeu ordinaire de 52 cartes » a 52 résultats possibles équiprobables.

(a) $(2 \times 13)/52 = 1/2$

(b) $13/52 = 1/4$

(c) $4/52 = 1/13$

(d) $2/52 = 1/26$

(e) $1/52$

E.7.2

L'expérience aléatoire « tirer au hasard une personne dans le groupe de 50 individus » a 50 résultats possibles équiprobables.

(a) $30/50 = 0.6$

(b) $(10 + 20)/50 = 30/50 = 0.6$

(c) $10/50 = 0.2$

E.7.3

Il y a au total $3 \times 5 = 15$ combinaisons possibles de réponses aux deux questions. L'expérience aléatoire « choisir au hasard une combinaison possible de réponses » a 15 résultats possibles équiprobables.
Par ailleurs, la première question a 3 réponses possibles (dont une seule est correcte) et la seconde question a 5 réponses possibles (dont une seule correcte). Par simplicité, notons R_1 l'événement consistant à choisir la bonne réponse pour la question 1 et R_2 l'événement consistant à choisir la bonne réponse pour la question 2 ; il est clair que ces deux événements R_1 et R_2 sont indépendants.

(a) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

(b) $P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = P(\overline{R}_1)\ P(\overline{R}_2) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

(c) $P(\text{au moins une réponse correcte}) = 1 - P(\text{aucune réponse correcte}) = 1 - P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

(d) $P\left((R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2) \cup (\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2)\right) = P(R_1 \cap \overline{R}_2) + P(\overline{R}_1 \cap R_2) + P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = P(R_1)\ P(\overline{R}_2) + P(\overline{R}_1)\ P(R_2) + P(\overline{R}_1)\ P(\overline{R}_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{14}{15}$

(e) $P(R_1) = \frac{1}{3}$

(f) $P(R_1 \cap \overline{R}_2) = P(R_1)\ P(\overline{R}_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

E.7.4

Soient les événements F_1 et F_2 correspondant à « tirer une fille dans le groupe U_1 » et

« tirer une fille dans le groupe U_2 », respectivement ; $P(F_1) = 15/50$ et $P(F_2) = 12/36$. Les événements F_1 et F_2 sont indépendants, puisque les tirages dans les deux groupes se font indépendamment l'un de l'autre. Dès lors :

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)\ P(F_2) = \frac{15}{50} \times \frac{12}{36} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}\ .$$

E.7.5

$$\begin{aligned}
& P(\text{il faut plus de 3 jets pour voir apparaître l'as}) \\
= \;& P(\text{les 3 premiers jets donnent un autre résultat que l'as}) \\
= \;& \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}
\end{aligned}$$

E.7.6

Pour $i = 1, 2, 3$, définissons l'événement D_i correspondant à « la personne sélectionnée au i-ème tirage a voté pour le candidat D ». Les trois tirages se faisant avec remise, les événements D_1, D_2 et D_3 sont mutuellement indépendants et ont tous trois une probabilité de $20\% = 0.2$ de se réaliser. Dès lors :

$$\begin{aligned}
& P(\text{sélectionner au moins un individu ayant voté pour } D) \\
= \;& 1 - P(\text{ne sélectionner aucun individu ayant voté pour } D) \\
= \;& 1 - P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = 1 - P(\overline{D}_1)P(\overline{D}_2)P(\overline{D}_3) \\
= \;& 1 - (0.8)^3 = 1 - 0.512 = 0.488.
\end{aligned}$$

E.7.7

$$\begin{aligned}
& P(\text{avoir « 4 » au moins une fois en deux jets d'un dé}) \\
= \;& 1 - P(\text{obtenir un autre résultat que « 4 » aux deux jets d'un dé}) \\
= \;& 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

E.7.8

Désignons par (x, y) (avec x et $y \in \{1, \ldots, 6\}$) l'événement consistant à obtenir le résultat x avec le premier dé et le résultat y avec le second dé.

(a) $P[(1,2) \cup (2,1)] = P[(1,2)] + P[(2,1)] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

(b) $P(\text{la somme des deux résultats} \geq 3) = 1 - P(\text{la somme des deux résultats} < 3) = 1 - P[(1,1)] = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

(c) $P(\text{la somme des deux résultats} \leq 3) = P[(1,1) \cup (1,2) \cup (2,1)] = \frac{3}{36}$

(d) $P(\text{la somme des deux résultats} \geq 4) = 1 - P(\text{la somme des deux résultats} < 4) = 1 - P(\text{la somme des deux résultats} \leq 3) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$

E.7.9

Soient, pour $i \geq 3$, les événements :

- A_i : A gagne le i-ème jeu ; $P(A_i) = 2/3$;
- B_i : B gagne le i-ème jeu ; $P(B_i) = 1/3$.

La probabilité recherchée est égale à :

$$\begin{aligned}
& P\left[(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) \cup (B_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7)\right. \\
& \qquad \left.\cup (A_3 \cap B_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) \cup (A_3 \cap A_4 \cap B_5 \cap A_6 \cap A_7) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap B_6 \cap A_7)\right] \\
= \; & P(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) + P(B_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) \\
& + P(A_3 \cap B_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7) + P(A_3 \cap A_4 \cap B_5 \cap A_6 \cap A_7) + P(A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap B_6 \cap A_7) \\
= \; & \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \\
= \; & \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left[1 + \frac{4}{3}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{7}{3} \,.
\end{aligned}$$

E.7.10

Fixons-nous une personne parmi les 200 personnes de l'auditoire : la probabilité qu'elle obtienne la même suite que A vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; la probabilité qu'elle obtienne une suite ne différant de celle de A que par un seul résultat vaut $10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. Dès lors, la probabilité qu'elle obtienne la même suite que A ou une suite ne différant de celle de A que par un seul résultat est égale à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Par conséquent, la probabilité qu'elle n'obtienne pas une telle suite vaut

$$1 - 11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

La probabilité recherchée est égale à $1-$ la probabilité qu'aucune des 200 personnes de l'auditoire n'obtienne la même suite que A ou une suite ne différant de celle de A que par un seul résultat. Elle est donc donnée par

$$1 - \left[1 - 11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]^{200}.$$

$\boxed{\textbf{E.7.11}}$

(a) $\frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15}$

(b) $\frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13}$

$\boxed{\textbf{E.7.12}}$

$$\begin{aligned}
& P[(\text{le 1er étudiant à passer l'examen est un garçon}) \cap (\text{le 2e est une fille}) \cap (\text{le 3e est une fille})] \\
= \; & P(\text{le 1er est un garçon}) P(\text{le 2e est une fille}|\text{le 1er est un garçon}) \\
& \qquad P(\text{le 3e est une fille}|\text{le 1er est un garçon et le 2e est une fille}) \\
= \; & \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \; = \; \frac{1}{15} \; \approx \; 0.067
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.7.13}}$

Désignons par P_i et I_i ($i = 1, 2, 3$) les événements « le i-ème ticket prélevé porte un numéro pair » et « le i-ème ticket prélevé porte un numéro impair », respectivement. Notons par ailleurs que, parmi les numéros de 1 à 9, cinq numéros sont impairs et quatre numéros sont pairs. On a :

$$\begin{aligned}
& P[(I_1 \cap P_2 \cap I_3) \cup (P_1 \cap I_2 \cap P_3)] \\
= \; & P(I_1 \cap P_2 \cap I_3) + P(P_1 \cap I_2 \cap P_3) \\
= \; & P(I_1)P(P_2|I_1)P(I_3|I_1 \cap P_2) + P(P_1)P(I_2|P_1)P(P_3|P_1 \cap I_2) \\
= \; & \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.7.14}}$

(a)

$$\begin{aligned}
& P[(\text{le 1er étudiant à passer l'examen n'est pas } A) \cap (\text{le 2e n'est pas } A) \cap (\text{le 3e est } A)] \\
= \; & \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \; = \; \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& P(\text{au moins un garçon passe l'examen dans les 3 premiers}) \\
= \; & 1 - P(\text{aucun garçon ne passe l'examen dans les 3 premiers}) \\
= \; & 1 - P[(\text{le 1er étudiant est une fille}) \cap (\text{le 2e est une fille}) \cap (\text{le 3e est une fille})] \\
= \; & 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
& P[(\text{le 1er est un garçon}) \cap (\text{le 2e est une fille}) \cap (\text{le 3e est un garçon}) \cap (\text{le 4e est une fille})] \\
& +P[(\text{le 1er est une fille}) \cap (\text{le 2e est un garçon}) \cap (\text{le 3e est une fille}) \cap (\text{le 4e est un garçon})] \\
= & \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \\
= & 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}
\end{aligned}
$$

E.7.15

$$
\begin{aligned}
& P(\text{au moins une des deux cartes prélevées est un cœur}) \\
= & 1 - P(\text{aucune des deux cartes prélevées n'est un cœur}) \\
= & 1 - \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}
\end{aligned}
$$

E.7.16

Définissons les événements suivants :

- G : le joueur désigné dans l'équipe est un garçon ;
- F : le joueur désigné dans l'équipe est une fille ;
- roi_i : la carte tirée au i-ème tirage est un roi ;
- dame_i : la carte tirée au i-ème tirage est une dame.

On a $P(G) = 3/5$ et $P(F) = 2/5$.

(a) $P(G \cap \text{roi}_1) = P(G)P(\text{roi}_1 |\, G) = P(G)P(\text{roi}_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{52}$

(b) $P(\text{roi}_1 \cap \text{dame}_2 |\, F) = P(\text{roi}_1)P(\text{dame}_2 |\, \text{roi}_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}$

(c) $P\big[(\text{roi}_1 \cap \overline{\text{roi}_2}) \cup (\overline{\text{roi}_1} \cap \text{roi}_2) \big|\, F\big] = P(\text{roi}_1 \cap \overline{\text{roi}_2}) + P(\overline{\text{roi}_1} \cap \text{roi}_2) = P(\text{roi}_1)P(\overline{\text{roi}_2} |\, \text{roi}_1) + P(\overline{\text{roi}_1})P(\text{roi}_2 |\, \overline{\text{roi}_1}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}$

(d) $P(G)P(\text{roi}_1 |\, G) + P(F)P\big[(\text{roi}_1 \cap \overline{\text{roi}_2}) \cup (\overline{\text{roi}_1} \cap \text{roi}_2) \big|\, F\big] = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{52} + \frac{2}{5}\left[\frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51}\right]$

E.7.17

(a) $\frac{6}{50} \cdot \frac{7}{49} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{6}{47}$

(b) $\frac{6}{50} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{6}{50} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48}$

(c) $\frac{6}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} \cdot \frac{3}{47}$

(d) $1 - \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \cdot \frac{43}{47}$

(e) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}$

E.7.18

$P(\text{arme}_1)P(\text{ch. vide}|\text{arme}_1) + P(\text{arme}_2)P(\text{ch. vide}|\text{arme}_2) + P(\text{arme}_3)P(\text{ch. vide}|\text{arme}_3)$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

E.7.19

U_1 : 9×50 euros et 1×100 euros
U_2 : 5×50 euros et 3×100 euros et 7×500 euros
U_3 : 2×50 euros

Définissons les événements suivants :

- E : tirer un billet de 100 euros dans U_3
- A : tirer un billet de 100 euros dans U_1 et dans U_2
- B : tirer un billet de 100 euros dans U_1, mais pas dans U_2
- C : tirer un billet de 100 euros dans U_2, mais pas dans U_1
- D : tirer un autre billet que 100 euros dans U_1 et dans U_2

On a :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) + P(D)P(E|D) \\ &= \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{15}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{12}{15}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{15}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{12}{15}\right) \cdot 0 \end{aligned}$$

E.7.20

Désignons par a le résultat obtenu par le joueur A et par b le résultat obtenu par le banquier B.

(a)

$$\begin{aligned} P(\text{le joueur } A \text{ gagne}|b \neq 4) &= \frac{P[(\text{ le joueur } A \text{ gagne}) \cap (b \neq 4))]}{P(b \neq 4)} \\ &= \frac{P[(a \geq b) \cap (b \neq 4))]}{P(b \neq 4)}. \end{aligned}$$

Or,

$$P(b \neq 4) = \frac{5}{6} \cdot$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & P[(a \geq b) \cap (b \neq 4))] \\ = \ & P(b=1)P(a \geq 1) + P(b=2)P(a \geq 2) + P(b=3)P(a \geq 3) \\ & \quad + P(b=5)P(a \geq 5) + P(b=6)P(a \geq 6) \\ = \ & \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ = \ & \frac{1}{6}\left[\frac{6}{6} + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right] \\ = \ & \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$P(\text{le joueur } A \text{ gagne}|b \neq 4) = \frac{1/2}{5/6} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \cdot$$

(b)

$$\begin{aligned}
& P(\text{le joueur } A \text{ gagne}) \\
= \;& P(b=4)P(\text{le joueur } A \text{ gagne}|b=4) + P(b\neq 4)P(\text{le joueur } A \text{ gagne}|b\neq 4) \\
= \;& \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{6}+\frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

E.7.21

Soient les événements

- S_i ($i = 1, 2, 3$) : A_i reste sain (en bonne santé) ;
- G_1 : le germe de la maladie G_1 a été contracté ;
- G_2 : le germe de la maladie G_2 a été contracté.

On sait que, pour $i = 1, 2, 3$: $P(S_i|G_1) = 80\% = 0.8$ et $P(S_i|G_2) = 60\% = 0.6$.

(a) $P(S_1|G_1 \cap G_2) = P(S_1|G_1)P(S_1|G_2) = (0.8)(0.6) = 0.48$

(b) La probabilité recherchée est égale à $1-$ la probabilité pour que les trois amis tombent tous trois malades :

$$1 - P(\overline{S}_1|G_2)P(\overline{S}_2|G_2)P(\overline{S}_3|G_2) = 1-(0.4)^3 = 1-0.064 = 0.936$$

(c) On sait que $P(G_1) = 1/3$ et $P(G_2) = 1/2$.

$$\begin{aligned}
P(S_2) &= P(\overline{G}_1\cap\overline{G}_2)P(S_2|\overline{G}_1\cap\overline{G}_2) + P(G_1\cap\overline{G}_2)P(S_2|G_1\cap\overline{G}_2) \\
&\qquad + P(\overline{G}_1\cap G_2)P(S_2|\overline{G}_1\cap G_2) + P(G_1\cap G_2)P(S_2|G_1\cap G_2) \\
&= P(\overline{G}_1)P(\overline{G}_2)1 + P(G_1)P(\overline{G}_2)P(S_2|G_1) \\
&\qquad + P(\overline{G}_1)P(G_2)P(S_2|G_2) + P(G_1)P(G_2)P(S_2|G_1)P(S_2|G_2) \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}(0.8) + \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}(0.6) + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}(0.8)(0.6) \\
&= \frac{1}{6}(2+0.8+1.2+0.48) = \frac{4.48}{6} = 0.746
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
& P(\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap S_3) + P(\overline{S}_1\cap S_2\cap\overline{S}_3) + P(S_1\cap\overline{S}_2\cap\overline{S}_3) \\
= \;& 3P(\overline{S}_1)P(\overline{S}_2)P(S_3) \\
= \;& 3(1-0.746)^2(0.746) \\
= \;& 0.144
\end{aligned}$$

E.7.22

Soient les événements :

- D : être daltonien ;
- H : être un homme ;
- F : être une femme.

On sait que $P(H) = P(F) = 1/2$, $P(D|H) = 5/100$ et $P(D|F) = 25/10000$. On recherche $P(H|D)$:

$$P(H|D) = \frac{P(H \cap D)}{P(D)} = \frac{P(H)P(D|H)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{P(D)} .$$

Or,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(H)P(D|H) + P(F)P(D|F) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000} . \end{aligned}$$

On a donc :

$$P(H|D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000}} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{5}{100} + \frac{25}{10000}} .$$

E.7.23

Soient les événements :

- U_1 : l'urne U_1 est choisie ;
- U_2 : l'urne U_2 est choisie ;
- B : on tire une boule blanche ;
- $\overline{B} = N$: on tire une balle noire.

L'énoncé du problème nous indique que : $P(U_1) = P(U_2) = 1/2$; $P(B|U_1) = 9/10$ et $P(B|U_2) = 5/25$. On recherche $P(U_1|B)$:

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_1)P(B|U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{P(B)} .$$

Or,

$$P(B) = P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{25} .$$

On obtient ainsi :

$$P(U_1|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{25}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10} + \frac{5}{25}} .$$

E.7.24

On sait qu'au moins une des trois balles est noire. Puisque les couleurs des balles mises dans l'urne ont été déterminées indépendamment d'une balle à l'autre, nous pouvons dire que les deux autres balles sont :

- toutes deux noires, avec une probabilité de $1/4$;
- toutes deux blanches, avec une probabilité de $1/4$;
- l'une blanche et l'autre noire, avec une probabilité de $2 \times 1/4 = 1/2$.

$\boxed{\textbf{E.7.25}}$

Soient les événements :

- PS : un plat froid spécial est commandé ;
- AC : une assiette de charcuterie est commandée ;
- H : le client est un homme ;
- F : le client est une femme.

L'énoncé nous indique que :

- $P(PS|H) = 80\% = 0.8$ et $P(PS|F) = 10\% = 0.1$;
- $P(AC|H) = 20\% = 0.2$ et $P(AC|F) = 90\% = 0.9$;
- $P(H) = 75\% = 0.75$ et $P(F) = 25\% = 0.25$.

(a)

$$\begin{aligned} P(PS) &= P(H)P(PS|H) + P(F)P(PS|F) \\ &= (0.75)(0.8) + (0.25)(0.1) \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

(b)

$$P(H|PS) = \frac{P(H \cap PS)}{P(PS)} = \frac{P(H)P(PS|H)}{P(PS)} = \frac{(0.75)(0.8)}{0.63} = 0.95$$

$\boxed{\textbf{E.7.26}}$

Soient les événements :

- S : réussir le slalom ;
- NP : la neige est poudreuse ;
- ND : la neige est dure ;
- NV : la neige est verglacée.

L'énoncé nous indique que :

$$\begin{array}{lll} P(NP) = 1/2 \ ; & P(ND) = 1/6 \ ; & P(NV) = 1/3 \ ; \\ P(S|NP) = 1/2 \ ; & P(S|ND) = 1/5 \ ; & P(S|NV) = 3/10. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(S) &= P(NP)P(S|NP) + P(ND)P(S|ND) + P(NV)P(S|NV) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} = 0.38 \end{aligned}$$

(b)

$$P(ND|S) = \frac{P(ND \cap S)}{P(S)} = \frac{P(ND)P(S|ND)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}}{0.38} = 0.09$$

(c)

$$\begin{aligned} & 1-P(\text{le skieur ne réussit aucun des 3 slaloms}) \\ = & \ 1-P(\overline{S})^3 \\ = & \ 1-(1-0.38)^3 \\ = & \ 0.76 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{E.7.27}}$

Soient les événements :

- R : Jean indique la bonne réponse ;
- C : Pierre connaît la bonne réponse ;
- S : Pierre souffle ce qu'il pense ;
- $\overline{S}$: Pierre souffle l'inverse de ce qu'il pense.

On a : $P(C) = 3/4$, $P(\overline{C}) = 1/4$, $P(S) = 3/4$ et $P(\overline{S}) = 1/4$.

Si Jean répond au hasard, alors $P(R) = 1/2$.

Si Jean écoute Pierre :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(C\cap S)P(R|C\cap S) + P(\overline{C}\cap S)P(R|\overline{C}\cap S) \\ &\quad + P(C\cap \overline{S})P(R|C\cap \overline{S}) + P(\overline{C}\cap \overline{S})P(R|\overline{C}\cap \overline{S}) \\ &= P(C)P(S)P(R|C\cap S) + P(\overline{C})P(S)P(R|\overline{C}\cap S) \\ &\quad + P(C)P(\overline{S})P(R|C\cap \overline{S}) + P(\overline{C})P(\overline{S})P(R|\overline{C}\cap \overline{S}) \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} > \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Cependant, les auteurs vous déconseillent toute forme de tricherie !

$\boxed{\textbf{E.7.28}}$

SANS remise :

(a) $\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}\cdot\frac{7}{27}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{10\ \cdot\ 9\ \cdot\ 20\cdot\ 19}{30\ \cdot\ 29\ \cdot\ 28\ \cdot\ 27} = 6\ \frac{10\ \cdot\ 9\ \cdot\ 20\ \cdot\ 19}{30\ \cdot\ 29\ \cdot\ 28\ \cdot\ 27}$

(c) $P(\text{4 garçons}) + P(\text{3 garçons et 1 fille}) = \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{18}{28}\cdot\frac{17}{27} + 4\ \frac{20\ \cdot\ 19\ \cdot\ 18\ \cdot\ 10}{30\ \cdot 29\ \cdot 28\ \cdot\ 27}$

AVEC remise :

(a) $\left(\frac{10}{30}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

(b) $6\left(\frac{10}{30}\right)^2\left(\frac{20}{30}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(c) $\left(\frac{20}{30}\right)^4 + 4\left(\frac{20}{30}\right)^3\frac{10}{30} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{3}$

E.7.29

(a) $\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18}$

(b) $\frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18}$

(c) $3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18}$

(d) $1 - P(\text{aucune blanche}) = 1 - \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{15}{18}$

(e) $6 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18}$

(f) $\frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{9}{18}$

E.7.30

AVEC remise :

(a) $3\left(\frac{13}{52}\right)^2 \frac{13}{52} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^3$

(b) $\frac{52}{52} \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4}$

SANS remise :

(a) $3 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{50}$

(b) $\frac{52}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50}$