Chapitre 2 : correction des exercices proposés

Exercices théoriques

T.2.1

$N(x)$ est le nombre d'observations de la série statistique dont la valeur est inférieure ou égale à x.

- Si $x < x_1$ (où x_1 est la plus petite valeur observée), alors $N(x) = 0$.
- Si $x_1 \leq x < x_2$, alors $N(x) = n_1 = N_1$: le nombre d'observations dont la valeur est $\leq x$ est égal au nombre d'observations dont la valeur est égale à x_1.
- Si $x_2 \leq x < x_3$, alors $N(x) = n_1 + n_2 = N_2$: le nombre d'observations dont la valeur est $\leq x$ est égal au nombre d'observations dont la valeur est égale à x_1 ou à x_2, c'est-à-dire est égal au nombre d'observations dont la valeur est $\leq x_2$.
- Etc.
- Puisque toutes les observations ont une valeur inférieure ou égale à x_J (où x_J est la plus grande valeur observée), on a $N(x) = N_J = n$ pour tout $x \geq x_J$.

T.2.2

$$N^*(x) = \begin{cases} n & x \leq x_1 \\ \vdots & \vdots \\ N_j^* & x_{j-1} < x \leq x_j \\ \vdots & \vdots \\ N_J^* = n_J & x_{J-1} < x \leq x_J \\ 0 & x_J < x \end{cases}$$

où $N^*(x)$ est le nombre d'observations de la série statistique dont la valeur est supérieure ou égale à x.

T.2.3

La courbe cumulative d'une D.G.1 est représentée à la figure 2.19 (p. 55).

- Si $x < \ell_1^-$, alors $N(x) = 0$.
- Pour $\ell_1^- \leq x < \ell_1^+$ ($x \in C_1$), le graphe de la courbe cumulative est un segment de droite allant du point de coordonnées $(\ell_1^-, 0)$ au point de coordonnées $(\ell_1^+, N_1 = n_1)$. Ce segment de droite a pour pente :

  $$\frac{N_1 - 0}{\ell_1^+ - \ell_1^-} = \frac{N_1}{h_1} = \frac{n_1}{h_1} \; .$$

  Dès lors, la courbe cumulative a pour équation :

  $$N(x) = 0 + \frac{n_1}{h_1}(x - \ell_1^-) = \frac{n_1}{h_1}(x - \ell_1^-).$$

- Pour $\ell_j^- \leq x < \ell_j^+$ $(x \in C_j)$, le graphe de la courbe cumulative est un segment de droite reliant les points de coordonnées (ℓ_j^-, N_{j-1}) et (ℓ_j^+, N_j). Ce segment de droite a pour pente :
$$\frac{N_j - N_{j-1}}{\ell_j^+ - \ell_j^-} = \frac{n_j}{h_j} \cdot$$
Dès lors, la courbe cumulative a pour équation :
$$N(x) = N_{j-1} + \frac{n_j}{h_j}(x - \ell_j^-).$$
- Si $x \geq \ell_J^+$, alors $N(x) = N_J = n$.

$\boxed{\textbf{T.2.4}}$

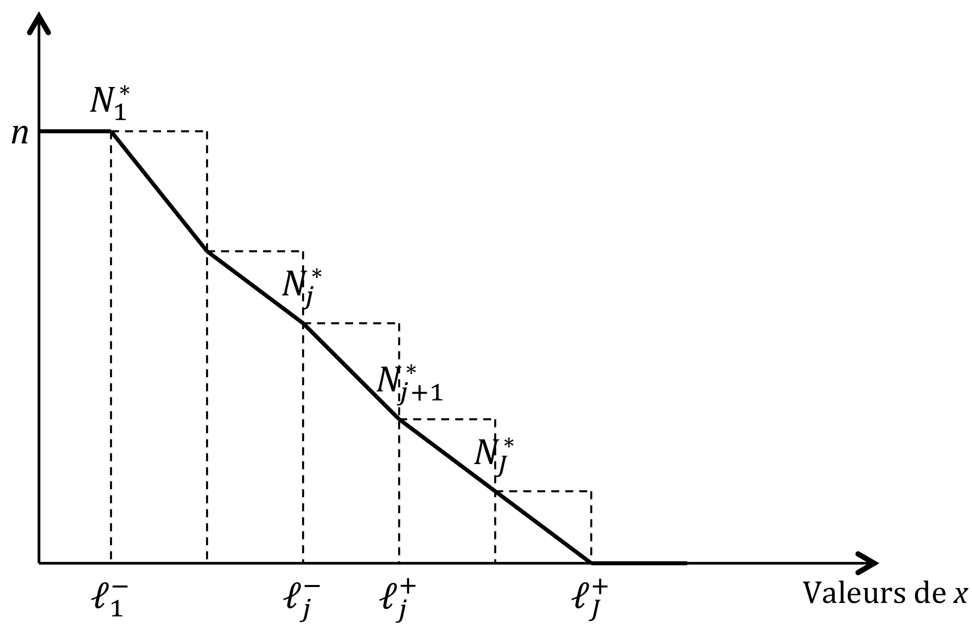

FIGURE 1 – *Courbe cumulative à droite d'une D.G.1*

Soit N_j^*, le nombre d'observations dont la valeur est dans la j-ème classe ou dans une classe supérieure, c'est-à-dire le nombre d'observations dont la valeur est $\geq \ell_j^-$ $(j = 1, \ldots, J)$. On a alors $N_1^* = n$ et $N_J^* = n_J$.

- Si $x < \ell_1^-$, alors $N^*(x) = n$.
- Pour $\ell_j^- \leq x < \ell_j^+$ $(x \in C_j)$, le graphe de la courbe cumulative à droite est un segment de droite reliant les points de coordonnées (ℓ_j^-, N_j^*) et (ℓ_j^+, N_{j+1}^*). Ce segment de droite a pour pente :
$$\frac{N_{j+1}^* - N_j^*}{\ell_j^+ - \ell_j^-} = -\frac{n_j}{h_j} \cdot$$
Dès lors, la courbe cumulative a pour équation :
$$N^*(x) = N_j^* - \frac{n_j}{h_j}(x - \ell_j^-).$$
- Si $x \geq \ell_J^+$, alors $N^*(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{T.2.5}}$

Dans l'histogramme des fréquences d'une D.G.1, l'aire du rectangle associé à la classe C_j est égale à la fréquence f_j de cette classe. Dès lors, l'aire en dessous de l'histogramme des fréquences est égale à

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_J = \sum_{j=1}^{J} f_j = 1 = 100\%.$$