ANNEXE 1

LES ENSEMBLES

A.1.1 DÉFINITIONS

Toute collection d'individus, d'objets... est appelée un ***ensemble***. Ces individus ou objets, pris isolément, sont des ***éléments***. En général, les ensembles sont désignés par des lettres majuscules $(A, B, \ldots)$ et les éléments par des lettres minuscules $(a, b, \ldots)$.

Si a est un élément de A, on l'indique par la notation : $a \in A$. Cette expression se lit : « *l'élément a appartient à l'ensemble A* ». Si b est un élément qui n'appartient pas à A, on écrit : $b \notin A$.

Certains ensembles sont désignés par des lettres bien précises. Par exemple :

$\mathbb{N}$:	ensemble des entiers *naturels*, c'est-à-dire $\{0, 1, 2, \ldots\}$;
$\mathbb{N}_0$:	ensemble des *entiers strictement positifs*, c'est-à-dire $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
$\mathbb{Z}$:	ensemble des *entiers relatifs*, c'est-à-dire $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;
$\mathbb{R}$:	ensemble des *(nombres) réels* ;
$\mathbb{R}_0$:	ensemble des *réels non nuls* ;
$\mathbb{R}^+$:	ensemble des *réels positifs* ;
$\mathbb{R}_0^+$:	ensemble des *réels strictement positifs*.

Les ensembles sont généralement définis au moyen d'une proposition s'exprimant par des mots ou par une propriété formulée mathématiquement (***définition en compréhension***), ou encore sous une forme indiquant explicitement les éléments de l'ensemble entre deux accolades (***définition en extension***). Quel que soit le mode de définition utilisé, il doit être très précis.

EXEMPLE A.1.1

Indiquons le mode de définition des ensembles suivants et proposons éventuellement une autre façon de les définir.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: *définition en extension*. Autres façons de définir A :
   - ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 5 ;
   - $\{x | x \in \mathbb{N}_0, x \leqslant 5\}$.

2. $B = \{a, b, c\}$: *définition en extension*. Autre façon de définir B :
   - ensemble constitué par les trois premières lettres de l'alphabet.
3. $C =$ ensemble des entiers relatifs divisibles par 3 : *définition en compréhension*. Autres façons de définir C :
   - $C = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;
   - $C = \{x | x = 3y, y \in \mathbb{Z}\}$.

Un ensemble peut contenir un nombre *fini* ou non d'éléments. Les ensembles A et B de l'exemple considéré ci-dessus sont finis. L'ensemble C ne l'est pas. Il en est de même pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

Si un ensemble A contient n éléments distincts, nous disons que A est de *cardinalité* égale à n. Le ***cardinal*** de A est alors noté par $\#(A)$: $\#(A) = n$.

Deux ensembles A et B sont *égaux* ($A = B$) s'ils contiennent les mêmes éléments. Par ailleurs, si A est un ensemble dont chaque élément appartient aussi à un ensemble B, on dit que A est un *sous-ensemble* ou une *partie* de B. A est *contenu* ou *inclus* dans B, ce qu'on note $A \subset B$.

Tout ensemble A comprenant au moins un élément contient les sous-ensembles particuliers suivants :

1. l'ensemble vide, noté $\emptyset$, qui ne comprend aucun élément ;
2. des singletons ne contenant qu'un seul élément ; ils sont notés par $\{a\}$, où $a \in A$;
3. l'ensemble A lui-même.

EXEMPLE A.1.2

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. On peut dresser la liste de tous les sous-ensembles de A :

1. l'ensemble vide $\emptyset \subset A$;
2. les 4 singletons $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{4\}$;
3. les sous-ensembles à deux éléments : $D_1 = \{1, 2\}$, $D_2 = \{1, 3\}$, $D_3 = \{1, 4\}$, $D_4 = \{2, 3\}$, $D_5 = \{2, 4\}$, $D_6 = \{3, 4\}$;
4. les sous-ensembles à trois éléments : $T_1 = \{1, 2, 3\}$, $T_2 = \{1, 2, 4\}$, $T_3 = \{1, 3, 4\}$, $T_4 = \{2, 3, 4\}$;
5. A lui-même.

L'*ensemble des parties* de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A. Dans notre exemple, nous avons :

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, S_1, S_2, S_3, S_4, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, T_1, T_2, T_3, T_4, A\}.$$

Remarquons que si $a \in A$, il n'est pas vrai que a soit un élément de $\mathcal{P}(A)$. Par contre $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Il est souvent utile de représenter un ensemble par un *diagramme de Venn* dans lequel les ensembles sont représentés par des courbes fermées et les éléments par des points intérieurs à ces dernières.

EXEMPLE A.1.2 (suite 1)

En reprenant l'exemple A.1.2, représentons par un diagramme de Venn les ensembles A, S_1, D_1, D_6 et T_4.

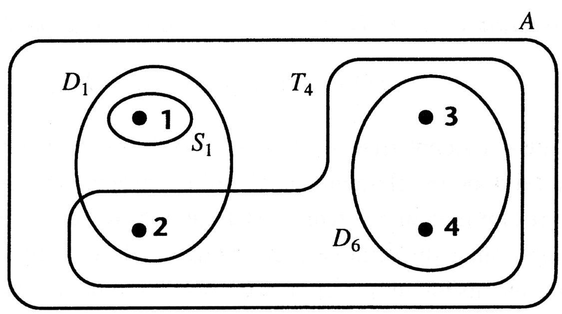

FIG. 1.1 – Diagramme de Venn

On constate ainsi aisément que :

$$S_1 \subset D_1 \subset A \,; D_6 \subset T_4 \subset A.$$

A.1.2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

Deux opérations sont essentielles lorsqu'on traite de problèmes utilisant des ensembles : la *réunion* et l'*intersection*.

Considérons un ensemble de référence Ω et deux sous-ensembles A et B [A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$].

1. La ***réunion*** de A et B, notée $A \cup B$, est définie par :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Il est clair que $A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ce nouveau sous-ensemble comprend donc les éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B. Cette alternative n'est pas exclusive : il suffit qu'un élément appartienne à *au moins* un des deux sous-ensembles A ou B pour faire partie de $A \cup B$. L'usage des diagrammes de Venn permet de visualiser cette opération. On constate aisément que $A \cup B$ correspond à la partie grisée du graphique de la figure 1.2.

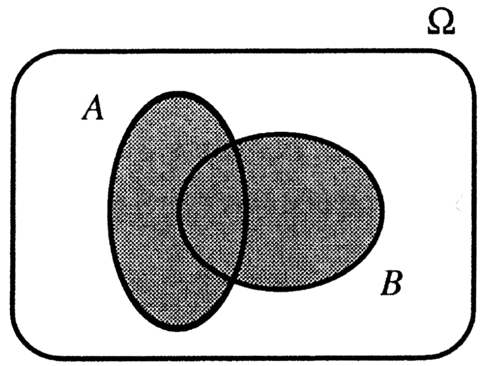

FIG. 1.2 – Réunion

2. L'***intersection*** de A et B, notée $A \cap B$, est définie par :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Il est aussi évident que $A \cap B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Le nouveau sous-ensemble comprend donc les éléments de Ω qui appartiennent à A et à B : il faut donc être simultanément dans A et B pour faire partie de $A \cap B$. L'usage des diagrammes de Venn permet à nouveau de visualiser cette opération. On constate aisément que $A \cap B$ correspond à la partie en grisé foncé du graphique de la figure 1.3.

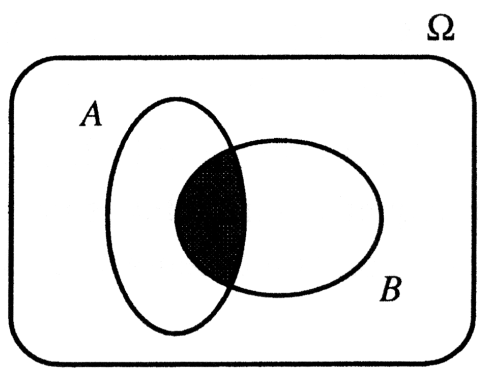

FIG. 1.3 – Intersection

Ces opérations de base permettent de définir les concepts importants suivants.

1. Deux sous-ensembles A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***disjoints*** ssi $A \cap B = \emptyset$. Ceci revient à dire qu'ils n'ont pas d'éléments communs.

2. Deux sous-ensembles A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***complémentaires*** (par rapport à Ω) ssi $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, B est encore noté $\overline{A}$.
3. La ***différence*** entre un sous-ensemble $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et un autre sous-ensemble $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, notée $A \backslash B$, contient tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B :

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

On peut aisément étendre les opérations de réunion et d'intersection à plus de deux sous-ensembles.

EXEMPLE A.1.2 (suite 2)

Reprenons les données de l'exemple A.1.2 et en particulier le diagramme de Venn de la figure 1.1. On constate aisément que :

1. $S_1 \cup D_6 = \{1, 3, 4\} = T_3$;
2. $D_1 \cup D_6 = \{1, 2, 3, 4\} = A$;
3. $D_1 \cap D_6 = \emptyset$: D_1 et D_6 sont disjoints ;
   au vu de 2. et 3., on constate que D_1 et D_6 sont complémentaires (par rapport à A) ;
4. $D_1 \backslash T_4 = \{1\} = S_1$;
5. $\overline{D}_1 = \{3, 4\} = D_6$;
6. $\overline{D_1 \cap T_4} = \overline{\{2\}} = \{1, 3, 4\} = T_3$;
   on constate ainsi que $D_1 \cap T_4$ et $S_1 \cup D_6$ sont complémentaires (voir 1. et 6.) ;
7. $\overline{S_1 \cup D_6} = \overline{\{1, 3, 4\}} = \{2\} = S_2$;
8. $\overline{D_1 \cup D_6} = \overline{A} = \emptyset$.

Nous pouvons aussi envisager des ensembles définis en compréhension.

EXEMPLE A.1.3

Considérons l'ensemble de référence $\Omega = \mathbb{N}_0$ et les sous-ensembles de Ω suivants :

- $P = \{\text{nombres pairs}\} = \{x | x = 2y, y \in \mathbb{N}_0\}$
- $I = \{\text{nombres impairs}\} = \{x | x = 2y - 1, y \in \mathbb{N}_0\}$
- $A = \{\text{multiples de 3}\} = \{x | x = 3y, y \in \mathbb{N}_0\}$
- $B = \{\text{nombres inférieurs à 10}\} = \{x | x < 10, x \in \mathbb{N}_0\}$
- $C = \{\text{multiples de 5}\} = \{x | x = 5y, y \in \mathbb{N}_0\}$
- $D = \{\text{nombres supérieurs à 5}\} = \{x | x > 5, x \in \mathbb{N}_0\}$.

1. $B \cup D = \mathbb{N}_0$, $B \cap D = \{6, 7, 8, 9\}$.
2. $P \cap I = \emptyset$, $P \cup I = \mathbb{N}_0 \Rightarrow P$ et I sont complémentaires.

3. $A \cup C = \{$multiples de 3 ou de 5$\} = \{x|x = 3y$ ou $x = 5y, y \in \mathbb{N}_0\}$,
   $A \cap C = \{$multiples de 3 et de 5$\} = \{$multiples de 15$\} = \{x|x = 15y, y \in \mathbb{N}_0\}$.
4. $P \cap A = \{$multiples de 2 et de 3$\} = \{$multiples de 6$\} = \{x|x = 6y, y \in \mathbb{N}_0\}$.
5. $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.
6. $B \cap C = \{5\}$.
7. $\overline{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{x|x \leqslant 5, x \in \mathbb{N}_0\}$.
8. $B \backslash P = \{1, 3, 5, 7, 9\} = B \cap I$.
9. $P \cap B \cap D = \{6, 8\}$.
10. $(A \cap C) \cap (B \cap D) = \emptyset$.

A.1.3 PRODUIT CARTÉSIEN DE DEUX ENSEMBLES

Soient A et B deux ensembles donnés. Le ***produit cartésien de 2 ensembles*** $A \times B$ est défini comme étant l'ensemble des couples distincts tels que la première composante de chaque couple est un élément de A et la seconde un élément de B :

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}.$$

EXEMPLE A.1.4

Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$. On vérifie aisément que :

1. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
2. $B \times B = B^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Ces produits admettent les représentations graphiques de la figure 1.4.

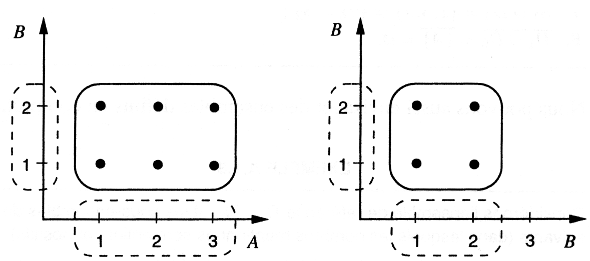

FIG. 1.4 – Produits cartésiens

A.1.4 EXERCICES PROPOSÉS

E.A.1.1 Écrivez chacun des ensembles suivants en extension :

(a) l'ensemble des entiers compris entre -1 et 3 ;

(b) l'ensemble des entiers positifs inférieurs à 5 ;

(c) l'ensemble des entiers négatifs supérieurs à -4 ;

(d) l'ensemble des diviseurs positifs de 16 ;

(e) $\{x|x \in \mathbb{N}, x < 7\}$;

(f) $\{x|x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\}$;

(g) $\{x|x \in \mathbb{N}, x - 4 < 0\}$;

(h) $\{x|x = 5y, y \in \mathbb{N}, 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

E.A.1.2 Écrivez en extension :

(a) l'ensemble des jours de la semaine ;

(b) l'ensemble des mois de l'année ;

(c) l'ensemble de vos ascendants vivants ;

(d) l'ensemble des cours que vous suivez cette année ;

(e) l'ensemble de vos amis (les vrais !).

E.A.1.3 Considérons les quatre éléments suivants : $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$. Quels sont ceux qui sont des ensembles ? Y en a-t-il qui soient égaux ?

E.A.1.4 Considérons les ensembles suivants :

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$;

(b) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, e\}, C = \{a, c, e, f\}$;

(c) $A = \{x|x \in \mathbb{N}, x < 5\}, B = \{x|x \in \mathbb{N}, x > 2\}, C = \{2, 4, 6\}$.

Trouvez, pour chacun des cas :

1˚) $A \cup B$;	2˚) $A \cup B \cup C$;	3˚) $A \cap B$;
4˚) $A \cap B \cap C$;	5˚) $A \cap (B \cup C)$;	6˚) $A \cup (B \cap C)$;
7˚) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;	8˚) $A \backslash B$;	9˚) $A \backslash (B \cap C)$;
10˚) $(A \cup B) \backslash C$.		

E.A.1.5 Déterminez si les ensembles suivants sont finis ou infinis :

(a) $\{1, 2, 3, 4\}$; (b)$\{a, b, \ldots, z\}$;

(c) $\mathbb{N}$; (d) $\{x|x \in \mathbb{N}, 4 < x < 10\}$;

(e) $\{x|x = 2y, y \in \mathbb{N}\}$; (f)$\{$multiples de 5$\}$;

(g) l'ensemble des points de la droite réelle ;

(h) l'ensemble des étudiants d'une université ;

(i) l'ensemble des droites du plan parallèles à une droite donnée.

E.A.1.6 Soit un ensemble Ω et trois sous-ensembles A, B, C. Vérifiez, en utilisant des diagrammes de Venn, que :

(a) si $A \subset B$, $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$;

(b) si $A \subset B$, $A \cup (B \backslash A) = B$;

(c) si $A \cap B = \emptyset$, $A \subset \Omega \backslash B$;

(d) $(\Omega \backslash A) \backslash (\Omega \backslash C) = C \backslash A$;

(e) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$;

(f) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;

(g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

E.A.1.7 Une ***partition*** d'un ensemble Ω est un ensemble de parties non vides $R_1, R_2, \ldots, R_p$ de Ω (voir figure 1.5) telles que :

$$R_i \cap R_j = \emptyset \ \ (i \neq j), \qquad R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_p = \Omega.$$

Construisez une partition en 4 sous-ensembles des ensembles suivants :

(a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$;

(b) Ω = l'ensemble des faces d'un dé ;

(c) Ω = l'ensemble des cartes d'un jeu complet (52 cartes) ;

(d) Ω = $\{x | x \in \mathbb{N}, x < 100\}$;

(e) Ω = l'ensemble des points du plan.

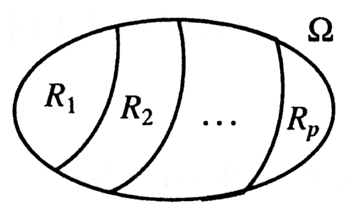

FIG. 1.5 – Partition

E.A.1.8 Trois cents étudiants de différentes facultés sont réunis dans une salle de cours. Il leur est demandé de préciser s'ils suivent un cours de droit (D), d'histoire (H) ou de statistique (S). En relevant les réponses, on constate que :

- 250 étudiants suivent le cours S ;
- 200 étudiants suivent le cours D ;
- 150 étudiants suivent le cours H ;
- 150 étudiants suivent à la fois les cours D et S ;
- 130 étudiants suivent à la fois les cours H et S ;
- 120 étudiants suivent à la fois les cours D et H.

On sait en outre qu'aucun étudiant ne suit le cours H sans suivre D ou S. Utilisez la théorie des ensembles pour connaître le nombre d'étudiants qui :

(a) suivent à la fois D, H et S ;

(b) suivent D, mais pas S ;

(c) suivent S, mais pas D ;

(d) suivent D, mais ni H ni S ;

(e) suivent S, mais ni D ni H ;

(f) ne suivent pas D ;

(g) suivent D ou S, mais pas H.

E.A.1.9 Considérons la figure 1.6 et la partition de Ω formée par R_1, R_2, R_3 et R_4. Exprimez les « régions » R_1, R_2, R_3 et R_4 en fonction de A et B.

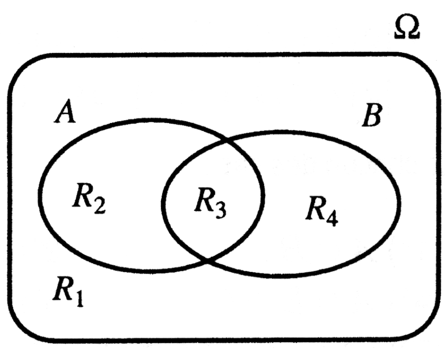

FIG. 1.6 – Exercice E.A.1.8

E.A.1.10 Déterminez l'ensemble des parties de $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$.

E.A.1.11 Construisez le produit cartésien de :

(a) $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$;

(b) $A = \{1, 2\}$ et $B = \mathbb{R}$;

(c) $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}$;

(d) $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$.